
# Impulso angular

R. O. Barrachina

*"Mensus eram coelos, nunc terrae metior umbras. Mens coelestis erat, corporis umbra iacet".*
*(Medí los cielos, ahora las sombras de la tierra mido. Celestial era el espíritu, ahora el cuerpo yace en las sombras).*
*Epitafio escrito por Johannes Kepler para su propia tumba.*

## 1. Johannes Kepler, el "perro sarnoso"

Ahora vamos a estudiar una ley de conservación que fue enunciada por primera vez en 1609 por Johannes Kepler con referencia al movimiento de los planetas alrededor del sol. El matemático y astrólogo[1] alemán Johannes Kepler trabajaba en la corte del emperador Rodolfo II en Praga bajo las órdenes del famoso astrónomo Tycho Brahe (1546-1601). A la muerte de éste el 24 de octubre de 1601, Kepler retuvo las tablas astronómicas más precisas conocidas hasta entonces, recolectadas por su maestro durante casi cuarenta años en el observatorio de la isla de Hveen en Dinamarca.

Los orígenes de Kepler eran tan oscuros y pobres como los de Brahe eran nobles y ricos. Era hijo de un soldado mercenario y la hija de un posadero. Que un niño de tan escasos recursos llegara a adquirir una educación se debió al buen sentido de los duques de Württemberg, que proveían becas para estudiantes pobres. Posteriormente, su profesor en la Universidad de Tübingen vio en Kepler una personalidad demasiado inquieta y apasionada como para que pudiera sobrevivir como clérigo en una era de luchas religiosas, así que logró torcer su interés hacia las matemáticas, que por aquella época era un área del conocimiento evidentemente más tranquila y saludable que la teología. Más tarde aceptó un puesto de maestro de matemáticas en la escuela luterana de Graz en la Austria católica. El sueldo era miserable, pero el trabajo no era muy exigente, ya que el número de estudiantes con algún interés en las matemáticas era pequeño. Así que Kepler tenía mucho tiempo libre para dedicarse a sus estudios astronómicos, y los trabajos que publicó durante esa época –sobre todo su *Mysterium cosmographicum*– le dieron una cierta reputación científica en Europa central.

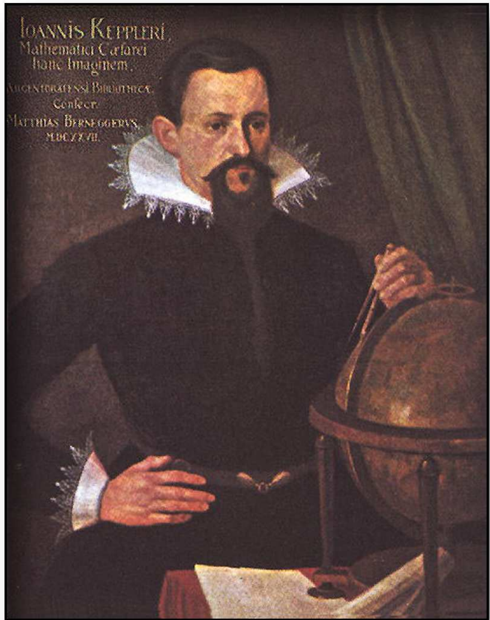



Figura 1. Retrato de Johannes Kepler (Weil der Stadt 27 de diciembre, 1571 – Ratisbona 15 de noviembre, 1630) puesto en exhibición en la Biblioteca de la Universidad de Estrasburgo en 1627.

A pesar de que con posterioridad Kepler alcanzaría mucha fama, nunca conoció ni la prosperidad económica ni la tranquilidad de su predecesor Tycho Brahe. Torturado por enfermedades reales e imaginarias, pobreza y persecuciones religiosas, su vida fue una lucha despiadada contra el destino y contra sus propios demonios. El mismo se solía llamar *el perro sarnoso*. Uno de los evento cruciales de su vida ocurrió cuando en el año 1600 se desató en Austria una violenta persecución religiosa contra los protestantes. Kepler se vio obligado a abandonar Graz. Por suerte para él y para la ciencia, encontró refugio y trabajo como asistente de Tycho Brahe.


Figura 2. Tycho Brahe (Knutstorp, Escania, en aquel entonces parte de Dinamarca, 14 de diciembre de 1546 – Praga, en aquel entonces capital de Bohemia, 24 de octubre de 1601).

Tycho Brahe había desarrollado un sistema geocéntrico propio donde, si bien todos los planetas giraban alrededor del Sol como en el modelo copernicano, este giraba alrededor de la Tierra que estaba en el centro del universo. Su sucesor Kepler era un convencido seguidor de Copérnico. El trabajo para el cual había sido contratado era la construcción, en base a las observaciones de Tycho Brahe, de mejores tablas astronómicas del movimiento planetario siguiendo el propio modelo de su antecesor. Pero la motivación y principal preocupación de Kepler era perfeccionar la teoría heliocéntrica de Copérnico, cuya armonía y sencillez contemplaba, según sus propias palabras, "con increíble y encantador deleite".

En aquella época, apoyar abiertamente la teoría de Copérnico podía resultar peligroso. Pero a Kepler acometió la empresa. Esto no nos debe hacer pensar que Johannes Kepler fuese ateo ó agnóstico. Era una persona profundamente religiosa y hasta mística, fuertemente influenciado por la metafísica neoplatónica. Para él, tanto como para Copérnico, la clave de la mente de Dios era el orden geométrico y la relación numérica expresada en las características del sistema heliocéntrico simple. Entre sus trabajos encontramos un entusiasta intento por descubrir una señal divina en una hipotética relación entre los cinco planetas conocidos y los cinco poliedros regulares de la geometría. La idea de Kepler era más o menos así: Hay exactamente cinco planetas, y también hay exactamente cinco poliedros regulares. Estos poliedros regulares se pueden construir uno a partir de otro haciendo coincidir los vértices de uno con los centros de las caras del otro. De esta manera los cinco poliedros quedan encajados uno dentro de otro, y es posible calcular las relaciones que existen entre las distancias de los vértices o las caras al centro de simetría. Por otro lado, si el modelo de Copérnico es correcto, los planetas se mueven en círculos alrededor del Sol. Ahora bien, si las relaciones entre los radios de estas órbitas son iguales a las relaciones que se encuentran en los poliedros regulares encajados, ello sólo se puede deber a la intervención de una inteligencia superior, constituyendo una señal irrefutable de la existencia de Dios.

Estas ideas no eran nuevas. Los seguidores de Pitágoras, por ejemplo, concibieron la llamada "Armonía de las esferas" según la cual las magnitudes relativas de las esferas celestes correspondientes a los planetas eran proporcionales a las longitudes de las sucesivas cuerdas de un instrumento armoniosamente afinado. La hipótesis de Kepler era del mismo tipo, sólo que el creía ver en el hecho de que hubiesen solamente cinco planetas una clave adicional.

Kepler sabía que su hipótesis podía no ser correcta, pero algo que no se le había pasado jamás por la cabeza era la posibilidad de que las órbitas no fuesen circulares. Tal como afirmara Copérnico "... el intelecto rechaza con horror" cualquier otra sugestión y "... no valdría la pena suponer tal cosa en una Creación constituida de la mejor manera posible". Así que pueden imaginarse la sorpresa de Kepler cuando, al intentar ajustar en una órbita circular los datos obtenidos por Tycho Brahe para Marte, descubrió que no era posible. Esta conclusión era aún más herética y –por lo tanto– peligrosa, que apoyar la teoría de Copérnico. ¡Los planetas se movían en órbitas no circulares, imperfectas, corruptas!. Aterrado, el pobre Kepler dedicó otros cuatro años a revisar sus cálculos una y otra vez, pero no había lugar a duda. La órbita de Marte no era circular. La diferencia no era muy grande, apenas ocho minutos de arco. Por lo tanto había resultado imperceptible para todos los astrónomos anteriores a Tycho Brahe , que no podían medir con errores menores a 10 minutos de arco. Con sus instrumentos superiores y su sistema de mediciones simultáneas, Tycho Brahe había reducido este error a apenas 1 minuto.

Teniendo en cuenta el riesgo que significaba sostener estas ideas , Kepler pudo haber optado entre tres alternativas. Una era olvidar estos resultados y salvar el pellejo. Otra era ocultar esa fatal diferencia detrás de algunas suposiciones convenientes, regresando, por ejemplo, a una versión más complicada del sistema ptolomaico, que para ese entonces -y después de varios siglos de correcciones sucesiva- ya incluía más de 70 movimientos circulares simultáneos entre epiciclos y deferentes. O, por último, continuar adelante con sus cálculos. La primer opción no era muy tentadora. A nadie le gusta tirar por la borda el trabajo de una vida. Además el riesgo no era muy grande. Alemania en vísperas de la Guerra de los Treinta Años no era la Italia que condenó a Giordano Bruno y que años más tarde condenaría a Galileo. Las divisiones religiosas generaban cuestiones más importantes que lo que un matemático protestante a las órdenes de un emperador católico pudiese opinar sobre las órbitas de los planetas. La segunda opción era prácticamente imposible, al menos para un copernicano convencido como Kepler. Para que el sistema de Ptolomeo pudiese explicar esa diferencia debía amontonarse artificio sobre artificio en un sistema de por sí ya bastante complicado. Por último, continuar con los cálculos significaba agregar a las ideas de un Sol inmóvil en el centro del Universo y una Tierra en movimiento del modelo de Copérnico, la descabellada hipótesis adicional de trayectorias imperfectas. A pesar de ello, Kepler se decidió por este último camino.

## 2. Las primeras dos leyes de Kepler

Lo que Kepler hizo a continuación fue una labor ciclópea de análisis numérico, impresionante desde todo punto de vista, inclusive en nuestra era informática. Con este avance lento y trabajoso coronaría uno de los primeros y más grandes triunfos del racionalismo. Abandonando toda atadura a la tradición helénica, no intentó interpretar la trayectoria de Marte como una combinación de órbitas esféricas. Las observaciones de Tycho Brahe habían derrumbado su fe mística en el círculo como forma perfecta. Y gracias a ello fue que descubrió que la órbita de Marte correspondía a un tipo simple de figura cuyas propiedades eran conocidas desde el siglo II A.C., la elipse. Así postuló su primera ley, que estudiaremos en detalle en otro apunte

> Los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol en uno de sus focos.

Y a continuación postuló otra ley más, que estudiaremos ahora

> Durante un lapso dado, una recta que va del planeta al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

Kepler publicó estos resultados en 1609 en su *Astronomia Nova.* Ya no sólo se aplicaban al movimiento de Marte, sino de todos los Planetas, e inclusive la Luna. Este libro fue incluido en el *Index Expurgatorius*, junto con el *Revoluciones* de Copérnico, donde permaneció en esa ilustre compañía hasta 1835.

## 3. Conservación del impulso angular

Consideremos la colisión de dos partículas aisladas de toda interacción externa. Nuestro objetivo es encontrar una tercera ley de conservación, descubierta por Kepler en marzo de 1618. Para ello definimos el momento cinético (ó angular) $\mathbf{L_{i0}}$ de cada una de ambas partículas de cantidad de movimiento $\mathbf{p}_i$ y posición $\mathbf{r}_i$ con respecto a un sistema inercial 0 arbitrario como

$$\mathbf{L}_{i0} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \; .$$

Definimos el momento angular total del sistema $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_{10} + \mathbf{L}_{20}$. Su variación temporal está dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_0}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2\right) \\
&= \mathbf{v}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{p}_2 + \mathbf{r}_1 \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{\mathrm{d}t} + \mathbf{r}_2 \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_2}{\mathrm{d}t} \\
&= 0 + 0 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} \; .
\end{aligned}$$

La cantidad

$$\mathbf{M}_{i0} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

se denomina momento de la fuerza neta aplicada a la partícula $i$ respecto del punto 0. Para cada partícula individual podemos escribir que $\mathrm{d}\mathbf{L}_{i0}/\mathrm{d}t = \mathbf{M}_{i0}$. Como la acción y la reacción de la interacción entre ambas partículas son iguales en magnitud y de sentido opuesto, $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_0}{\mathrm{d}t} &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} \\
&= \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \; .
\end{aligned}$$

Vemos que el momento de la fuerza total es independiente del centro de momentos. Para obtener este resultado hemos utilizado la tercera ley de Newton que establece que la acción sobre una de las partículas es igual en magnitud y de sentido opuesto a la reacción en la otra partícula, $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$. Sin embargo, debemos recordar que esta ley no dice nada respecto de la *dirección* de esta interacción. Si además la interacción entre ambas partículas es central, entonces el momento de fuerza es nulo y el impulso angular se conserva. Este resultado se puede extender inmediatamente para un sistema de $N$ partículas aisladas en interacción mutua por medio de fuerzas centrales, indicando que el impulso angular total,

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \ ,$$

se conserva.

## 4. Impulso angular intrínseco

Usualmente se interpreta la conservación del impulso angular de un sistema de dos partículas,

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 \ ,$$

diciendo que el movimiento del sistema se mantiene en un plano perpendicular a $\mathbf{L}_0$. Este es un concepto peligrosamente incorrecto, o al menos poco preciso.

Para explicar esto más claramente, escribimos el impulso angular en términos de las coordenadas del sistema centro de masa

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_0 &= \mathbf{L}_{10} + \mathbf{L}_{20} \\
&= \mathbf{r}_1 \times m_1 \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} + \mathbf{v}_{cm} \right) + \mathbf{r}_2 \times m_2 \left( -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v} + \mathbf{v}_{cm} \right) \\
&= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times m\mathbf{v} + (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2) \times \mathbf{v}_{cm} \\
&= \mathbf{r} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r}_{cm} \times M\mathbf{v}_{cm} \ .
\end{aligned}$$

Hemos separado el impulso angular en dos términos. Uno es un impulso angular "intrínseco" al sistema,

$$\vec{\ell} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \ ,$$

independiente del punto 0, y equivalente al de una partícula de masa reducida $m = m_1m_2/(m_1+m_2)$ con vector posición $\mathbf{r}$. El otro término se refiere al movimiento del sistema de dos partículas como un todo respecto del punto 0. Este último término es equivalente al de una partícula de masa $M = m_1+m_2$ localizada en el centro de masa. Si escribimos $\mathbf{r}_{cm} = \mathbf{b}_{cm} + \mathbf{v}_{cm}t$, con $\mathbf{b}_{cm}$ una constante arbitraria fijada por la condición inicial, obtenemos

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} + \mathbf{b}_{cm} \times M\mathbf{v}_{cm} \ .$$

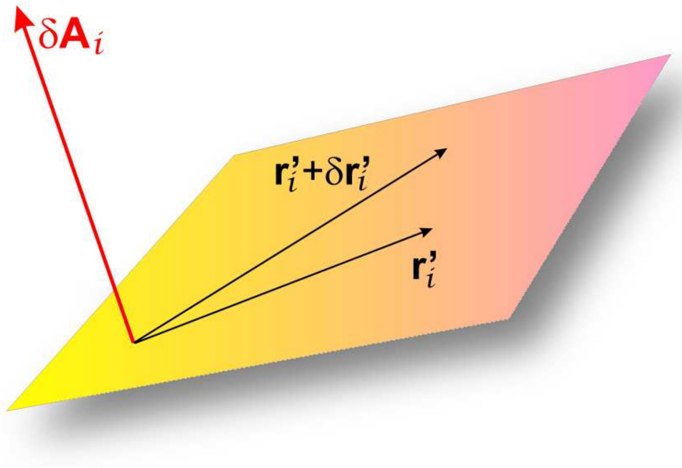
Vemos que el último término es constante. O sea que el impulso angular intrínseco $\mathbf{l}$ se conserva. Ahora si, podemos interpretar este resultado en el sentido de que la coordenada relativa $\mathbf{r}$ debe mantenerse en un mismo plano ¡con el centro de masa! Como las posiciones relativas de ambas partículas respecto del centro de masa, son proporcionales a $\mathbf{r}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{cm} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\
\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{cm} &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \ ,
\end{aligned}$$

ambas partículas se deben mover en un mismo plano con el centro de masa. Pero este plano se puede desplazar respecto de un sistema inercial arbitrario 0 con velocidad $\mathbf{v}_{cm}$. Y respecto de este sistema de referencia, las partículas ya no siguen trayectorias coplanares.

## 5. Conservación de la velocidad areolar

Ahora escribiremos la ley de conservación anterior en una forma similar a la empleada por Kepler en su *Astronomia Nova* de 1609. En el sistema centro de masa, el vector posición de cada partícula $\mathbf{r}'_i$ recorre el plano de movimiento barriendo un área –por unidad de tiempo– dada por



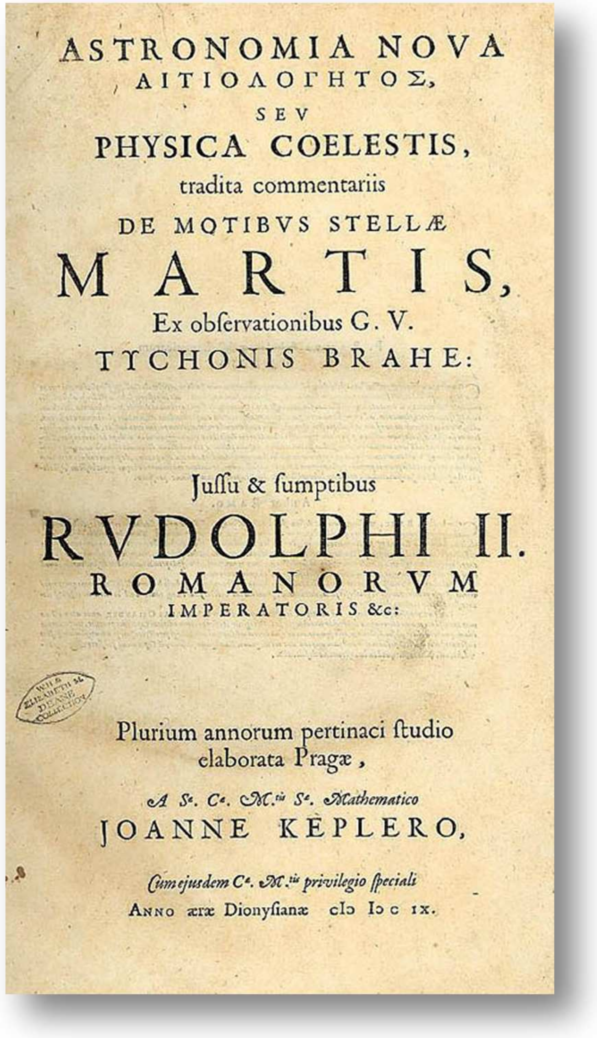

$$\delta \mathbf{A}_i = \frac{1}{2}\,\mathbf{r}'_i \times \delta\mathbf{r}'_i = \frac{m^2}{2m_i^2}\,\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}\ .$$

Por lo tanto

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{m^2}{2m_i^2}\,\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{m}{2m_i^2}\,\vec{\ell}\,.$$

O sea que la constancia del impulso angular intrínseco nos indica que el vector posición de cada partícula respecto del centro de masa barre áreas iguales en tiempos iguales. Más aún, la variación de las áreas barridas por los vectores posición de ambas partículas verifican que

$$m_1\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}_1}{\mathrm{d}t} + m_2\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{\ell}\,.$$


ASTRONOMIA NOVA
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ,
SEV
PHYSICA COELESTIS,
tradita commentariis
DE MOTIBVS STELLÆ
MARTIS,
Ex obſervationibus G. V.
TYCHONIS BRAHE:

Juſſu & ſumptibus
RVDOLPHI II.
ROMANORVM
IMPERATORIS &c:

Plurium annorum pertinaci ſtudio
elaborata Pragæ,

A S. C. M.$^{tis}$ S. Mathematico
JOANNE KEPLERO,

Cum ejusdem C. M.$^{tis}$ privilegio ſpeciali
ANNO æræ Dionyſianæ clↃ IↃ c IX.

Figura 4. Portada del libro “Astronomia Nova”, publicado por Johannes Kepler en 1609.

## 6. Constantes de movimiento

La ley que hemos estudiado en este apunte puede interpretarse como una "limitación" para el movimiento de las partículas. Constituye un *teorema de conservación* asociado a una dada magnitud física cuyo valor numérico y dirección deben permanecer constantes, estando totalmente fijados por las condiciones iniciales. Este tipo de magnitudes con estas características se denominan "constantes de movimiento".

Una ley de conservación es el equivalente científico del gatopardismo en política, y que podríamos resumir con el aforismo francés: *plus ça change, plus c'est la mème chose*. Aplicado a un proceso complejo donde todo parece estar cambiando constantemente, una ley de conservación es una afirmación que dice que "algo" permanece igual. Ante la fascinación que suscitaron las leyes de Newton, muchos no advirtieron el verdadero poder de esta forma de ley física hasta finales del siglo XVIII. Hoy en día, en cambio, cuando surge una nueva teoría, primero se suelen formular sus leyes físicas básicas en términos de leyes de conservación.

## Notas

[1]Si bien Kepler trabajó con ahínco en la realización de predicciones astrológicas y en distintos estudios matemáticos relacionados con los fenómenos celestes, nunca se dedicó a las observaciones astronómicas directas. Las posibles causas pueden buscarse en su débil contextura física y en su vista debilitada y con doble visión en uno de sus ojos, resultado de la viruela que contrajo a la edad de 5 años.